Archiwum Fotogrametrii, Kartografii i Teledetekcji, Vol. 19, 2009
ISBN 978-83-61576-09-9

ŚCISŁA OCENA DOKŁADNOŚCI PRZETRANSFORMOWANYCH WSPÓŁRZĘDNYCH PO WPROWADZENIU KOREKT HAUSBRANDTA

PRECISE ACCURACY EVALUATION OF TRANSFORMED COORDINATES AFTER HAVING INCLUDED THE HAUSBRANDT CORRECTIONS

Józef Beluch

Katedra Geomatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

SŁOWA KLUCZOWE: ocena dokładności, transformacja współrzędnych, korekty Hausbrandta

STRESZCZENIE: Współrzędne wtórne punktów dostosowania po transformacji najczęściej pozostawia się bez zmian, zachowując ich wartości katalogowe. Takie postępowanie narusza cechę podobieństwa transformacji Helmerta. W celu minimalizacji skutków przedstawionego postępowania, wprowadza się tzw. korekty Hausbrandta. W artykule wyprowadzone zostały wzory na ścisłe określenie średnich błędów współrzędnych i położenia punktów po wprowadzeniu korekt.

Do wyznaczenia parametrów transformacji przyjęty został model funkcjonalny w formie równań warunkowych z niewiadomymi. W procedurach obliczeniowych uwzględniono także model stochastyczny uściślający relacje dokładnościowe współrzędnych (pseudoobserwacje) punktów dostosowania w układzie pierwotnym i wtórnym. Wyprowadzone wzory pozwalają między innymi na kwalifikację punktów po transformacji, do odpowiedniej klasy dokładnościowej.

1. WPROWADZENIE

Niniejsza publikacja jest kontynuacją wcześniejszych opracowań autora (Beluch, 2007 i 2008) w zakresie oceny dokładności wyników transformacji, uwzględniająca problematykę korekt Hausbrandta. Jak wiadomo korekty te wprowadzane są do przetransformowanych współrzędnych z układu pierwotnego na układ wtórny, gdy współrzędne punktów dostosowania pozostawia się bez zmian. Postępowanie takie ma na celu zminimalizowanie skutków deformacji sieci w przypadku tworzenia po transformacji zbioru współrzędnych według wyżej przedstawionych zasad. W wyniku procesu obliczeniowego związanego z transformacją i wprowadzeniem korekt zmienia się dokładność położenia punktów. Wyprowadzone przez autora wzory pozwolą na określenie najprawdopodobniejszej oceny dokładności położenia punktów po wykonaniu podanych procedur obliczeniowych.

2. MODEL WYZNACZENIA PARAMETRÓW TRANSFORMACJI HELMERTA

Przeliczanie współrzędnych z układu pierwotnego na wtórny w transformacji Helmerta dokonywany jest wzorami:

$$X_i^t = c + bx_i - ay_i \tag{1a}$$

$$Y_i^t = d + ax_i + by_i \tag{1b}$$

gdzie:

x_i, y_i, – współrzędne punktów w układzie pierwotnym,

X_i^t, Y_i^t – przetransformowane współrzędne do układu wtórnego,

a, b, c, d - parametry transformacji.

Jak wiadomo parametry transformacji wyznaczamy z układu (1a) i (1b) na podstawie współrzędnych punktów dostosowania zakładając, że współrzędne te są pseudoobserwacjami w układzie pierwotnym i wtórnym. Z tego względu dla każdego punktu dostosowania można napisać dwa równania warunkowe z niewiadomymi:

$$\overline{X}_i + v_{\overline{X}_i} = (c_0 + \mathrm{d}\,c) + (b_0 + \mathrm{d}\,b)\left(\overline{x}_i + v_{\overline{x}_i}\right) - (a_0 + \mathrm{d}\,a)\left(\overline{y}_i + v_{\overline{y}_i}\right) \; ^{1)} \tag{2a}$$

$$\overline{Y}_i + v_{\overline{Y}_i} = (d_0 + \mathrm{d}\,d) + (a_0 + \mathrm{d}\,a)\left(\overline{x}_i + v_{\overline{x}_i}\right) + (b_0 + \mathrm{d}\,b)\left(\overline{y}_i + v_{\overline{y}_i}\right) \tag{2b}$$

które utworzą układ zapisany w następującej formie macierzowej:

$$\mathbf{E}\mathbf{V}_{\overline{W}_w} + \mathbf{B}_p \mathbf{V}_{\overline{W}_p} + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L} = 0 \tag{3}$$

gdzie:

$\overline{\mathbf{W}}_W$ - zbiór współrzędnych wtórnych punktów dostosowania,

$\overline{\mathbf{W}}_p$ - zbiór współrzędnych pierwotnych punktów dostosowania,

$\mathbf{E}$ – macierz jednostkowa,

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} -b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & -b_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \cdots & -b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_0 & -b_0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1 & -\overline{x}_1 & -1 & 0 \\ -\overline{x}_1 & -\overline{y}_1 & 0 & -1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \overline{y}_n & -\overline{x}_n & -1 & 0 \\ -\overline{x}_n & -\overline{y}_n & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2n\times 4} \tag{4a}$$

---

1) kreski nad współrzędnymi wyróżniają współrzędne dostosowania

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 - \left(c_0 + b_0\overline{x}_1 - a_0\overline{y}_1\right) \\ \overline{Y}_1 - \left(d_0 + a_0\overline{x}_1 + b_0\overline{y}_1\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{X}_n - \left(c_0 + b_0\overline{x}_n - a_0\overline{y}_n\right) \\ \overline{Y}_n - \left(d_0 + a_0\overline{x}_n + b_0\overline{y}_n\right) \end{bmatrix}_{2n\times 1} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{W}} - \mathbf{C} \tag{4b}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{E}\ \mathbf{B}_p] \tag{5}$$

$$\mathbf{C} = [c_0\ d_0 \cdots c_0\ d_0]^T_{1\times 2n} \tag{6}$$

$$\overline{\mathbf{W}} = \left[\overline{\mathbf{W}}_W^T \overline{\mathbf{W}}_p^T\right] = \left[\overline{X}_1\ \overline{Y}_1 \cdots \overline{X}_n\ \overline{Y}_n\ \overline{x}_1\ \overline{y}_1 \cdots \overline{x}_n\ \overline{y}_n\right]^T_{1\times 4n} \tag{7}$$

$$\mathbf{V}_{\overline{W}_w} = [v_{\overline{X}_1}\ v_{\overline{Y}_1} \ldots v_{\overline{X}_n}\ v_{\overline{Y}_n}]^T_{1\times 2n} \tag{8}$$

$$\mathbf{V}_{\overline{W}_p} = [v_{\overline{x}_1}\ v_{\overline{y}_1} \ldots v_{\overline{x}_n}\ v_{\overline{y}_n}]^T_{1\times 2n} \tag{9}$$

$$\mathbf{X} = [\mathrm{d}a \quad \mathrm{d}b \quad \mathrm{d}c \quad \mathrm{d}d]^T_{1\times 4} \tag{10}$$

Pseudoobserwacjom przyporządkujemy wagi ujęte w następujące formy macierzowe:

$$\mathbf{P}_{\overline{W}_w} = diag\left[m^2_{\overline{X}_1}\ m^2_{\overline{Y}_1} \cdots m^2_{\overline{X}_n}\ m^2_{\overline{Y}_n}\right]^{-1} \tag{11}$$

oraz

$$\mathbf{P}_{\overline{W}_p} = diag\left[m^2_{\overline{x}_1}\ m^2_{\overline{y}_1} \cdots m^2_{\overline{x}_n}\ m^2_{\overline{y}_n}\right]^{-1} \tag{12}$$

gdzie:

$\mathbf{P}_{\overline{W}_w}$, $\mathbf{P}_{\overline{W}_p}$ - macierze wagowe współrzędnych $\overline{X}, \overline{Y}$ punktów dostosowania układu wtórnego i współrzędnych $\overline{x}, \overline{y}$ układu pierwotnego.

W wyniku ścisłego rozwiązania układu (3) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= -\left[\mathbf{A}^T\left(\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w} + \mathbf{B}_p\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p}\mathbf{B}^T_p\right)^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}^T\left(\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w} + \mathbf{B}_p\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p}\mathbf{B}^T_p\right)^{-1}\mathbf{L} = \\ &= \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = -\mathbf{U}\mathbf{L} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w} + \mathbf{B}_p\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p}\mathbf{B}^T_p\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L}\right) = \mathbf{P}\left(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L}\right) \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\overline{W}_w} \\ \mathbf{V}_{\overline{W}_p} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\overline{W}_w} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{\overline{W}_p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{K} \tag{15}$$

3. OCENA DOKŁADNOŚCI WYZNACZENIA PARAMETRÓW TRANSFORAMCJI

Średnie błędy wyznaczenia parametrów a, b, c, d obliczymy wzorem

$$m_k = m_0 \sqrt{\left\{ \mathbf{A}^T \left(\mathbf{P}_{\overline{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\overline{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T \right)^{-1} \mathbf{A} \right\}_{kk}^{-1}} = m_0 \sqrt{\left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)_{kk}^{-1}} \tag{16}$$

gdzie:

$$m_0 = \sqrt{\frac{1}{2n-4} \left(\mathbf{V}_{\overline{W}_w}^T \mathbf{P}_{\overline{W}_w} \mathbf{V}_{\overline{W}_w} + \mathbf{V}_{\overline{W}_p}^T \mathbf{P}_{\overline{W}_p} \mathbf{V}_{\overline{W}_p} \right)} \tag{17}$$

$k = a, b, c, d.$
n – liczba punktów dostosowania.
Wyrażenie pod pierwiastkiem wzoru (16) jest elementem przekątniowym macierzy $\left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^{-1}$

4. KOREKTA WSPÓŁRZĘDNYCH PO TRANSFORMACJI

Korekta współrzędnych po transformacji dokonywana jest wzorem:

$$\underline{\underline{X}}_{pj}^t = X_{pj}^t - V_{X_{pj}^t} \tag{18a}$$

$$\underline{\underline{Y}}_{pj}^t = Y_{pj}^t - V_{Y_{pj}^t} \tag{18b}$$

gdzie:

$\underline{\underline{X}}_{pj}^t, \underline{\underline{Y}}_{pj}^t$ - skorygowane przetransformowane współrzędne z układu pierwotnego j-tego punktu,

X_{pj}^t, Y_{pj}^t - przetransformowane współrzędne z układu pierwotnego j-tego punktu,

$V_{X_{pj}^t}, V_{Y_{pj}^t}$ - korekty (poprawki) Hausbrandta j-tego punktu.

Poprawki $V_{X_{pj}^t}, V_{Y_{pj}^t}$ liczone są wzorami

$$V_{X_{pj}^t} = \sum_{i=1}^{n} R_{ji} V_{\overline{X}_i}\,; \qquad V_{Y_{pj}^t} = \sum_{i=1}^{n} R_{ji} V_{\overline{Y}_i} \tag{19}$$

gdzie:

$$R_{ji} = \frac{r_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} r_{ji}} \tag{20}$$

$j = 1, 2, \ldots, u$

$i = 1, 2, \ldots, n$

u – liczba punktów posiadających tylko współrzędne pierwotne,

n – liczba punków dostosowania.

$$r_{ji} = \frac{1}{d_{ji}^2} = \left[\left(\overline{X}_i - X_j^t\right)^2 + \left(\overline{Y}_i - Y_j^t\right)^2\right]^{-1} \tag{21}$$

5. WYPROWADZENIE WZORÓW NA OKREŚLENIE ŚREDNICH BŁEDÓW WSPÓŁRZĘDNYCH $\underline{\underline{X}}_p^t, \underline{\underline{Y}}_p^t$ ORAZ ŚREDNICH BŁEDÓW POŁOŻENIA PUNKTÓW

Wzory (18a) i (18b) możemy zapisać w następującej formie szczegółowej

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{X}}_{p1}^t \\ \underline{\underline{Y}}_{p1}^t \\ \vdots \\ \underline{\underline{X}}_{pu}^t \\ \underline{\underline{Y}}_{pu}^t \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{W}}}_p^t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -y_u & x_u & 1 & 0 \\ x_u & y_u & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_2} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{d}a \\ \mathrm{d}b \\ \mathrm{d}c \\ \mathrm{d}d \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \right) - \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{12} & 0 & R_{1n} & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & R_{12} & 0 & R_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{u1} & 0 & R_{u2} & 0 & R_{un} & 0 \\ 0 & R_{u1} & 0 & R_{u2} & 0 & R_{un} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{\overline{X}_1} \\ V_{\overline{Y}_1} \\ \vdots \\ V_{\overline{X}_n} \\ V_{\overline{Y}_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{\overline{W}_w}} \tag{22}$$

ogólnie

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}{}_{p} = \mathbf{T}_2\left(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}\right) - \mathbf{R}\mathbf{V}_{\overline{W}_w} \tag{23}$$

Formę liniową tej funkcji napiszemy w postaci:

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p} = \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{po} + \mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p} \tag{24}$$

gdzie:

$\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{po}$ - macierz zbioru współrzędnych przybliżonych,

$\mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p}$ - macierz różniczki zupełnej

$$\mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}{}_{p}}{\partial \mathbf{W}}\,\mathrm{d}\,\mathbf{W} \tag{25}$$

$\mathbf{W}$ – zbiór współrzędnych obejmujących podzbiory: $\overline{\mathbf{W}}_W, \overline{\mathbf{W}}_p$ i $\mathbf{W}_p$ ($\mathbf{W}_p$ - jest podzbiorem współrzędnych punktów w układzie pierwotnym nie obejmującym punktów dostosowania).

Bardziej szczegółowa forma wzoru (25):

$$\mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p}}{\partial \overline{\mathbf{W}}_w} & \dfrac{\partial \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p}}{\partial \overline{\mathbf{W}}_p} & \dfrac{\partial \underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p}}{\partial \mathbf{W}_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_w \\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_p \\ \mathrm{d}\,\mathbf{W}_p \end{bmatrix} \tag{26}$$

Stosując (26) w odniesieniu do (23) otrzymamy

$$\mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^{t}_{p} = \mathrm{d}\,\mathbf{T}_2\mathbf{X}_0 + \mathrm{d}\,\mathbf{T}_2\mathbf{X} + \mathbf{T}_2\,\mathrm{d}\,\mathbf{X} - \mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} = \mathrm{d}\,\mathbf{T}_2\,\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{T}_2\,\mathrm{d}\,\mathbf{X} - \mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} \tag{27}$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X} = \left[a\ b\ c\ d\right]^T \tag{28}$$

Wyznaczymy teraz kolejne iloczyny macierzy występujące we wzorze (27).

Różniczkując macierz $\mathbf{T}_2$ ze wzoru (22) i mnożąc ją przez $\hat{\mathbf{X}}$ otrzymamy:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{T}_2\,\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{d}\,y_1 & \mathrm{d}\,x_1 & 0 & 0 \\ \mathrm{d}\,x_1 & \mathrm{d}\,y_1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\mathrm{d}\,y_u & \mathrm{d}\,x_u & 0 & 0 \\ \mathrm{d}\,x_u & \mathrm{d}\,y_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\,\mathrm{d}\,y_1 + b\,\mathrm{d}\,x_1 \\ a\,\mathrm{d}\,x_1 + b\,\mathrm{d}\,y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ -a\,\mathrm{d}\,y_u + b\,\mathrm{d}\,x_u \\ a\,\mathrm{d}\,x_u + b\,\mathrm{d}\,y_u \end{bmatrix} \tag{29}$$

W dostosowaniu do (26) macierz tą przedstawimy w formie:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{T}_2\,\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{J}_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_w \\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_P \\ \mathrm{d}\,\mathbf{W}_P \end{bmatrix} \tag{30}$$

gdzie:

$$\mathbf{J}_{13} = \begin{bmatrix} b & -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{bmatrix}_{2u\times 2u} = -\mathbf{B}_u \tag{31}$$

Macierz $\mathbf{J}_{13}$ tworzona jest analogicznie jak $\mathbf{B}_p$ ale z przeciwnym znakiem i o wymiarach $2u \times 2u$.

Iloczyn $\mathbf{T}_2\,\mathrm{d}\,\mathbf{X}$ występujący we wzorze (27) wyznaczymy zwracając uwagę, że zgodnie z (13) i (4b)

$$\mathbf{X} = -\mathbf{U}\cdot\left(\mathbf{B}\overline{\mathbf{W}} - \mathbf{C}\right) \tag{32}$$

stąd

$$\mathrm{d}\,\mathbf{X} = -\mathbf{U}\mathbf{B}\;\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} \tag{33}$$

$\mathbf{C}$ – zgodnie z (6) macierz wartości przybliżonych, a zatem

$$\mathbf{T}_2\ \mathrm{d}\,\mathbf{X} = -\mathbf{T}_2\mathbf{U}\mathbf{B}\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} \tag{34}$$

Pozostaje do wyznaczenia iloczyn $\mathbf{R}\ \mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w}$ występujący we wzorze (27) na podstawie wzoru(15); (14); (13) i (4b) określimy:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\overline{W}_w} &= -\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{K} = -\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AX}+\mathbf{L}) = -\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(-\mathbf{AUL}+\mathbf{L}) = \mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})\mathbf{L} = \\ &= \mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})(\mathbf{B}\overline{\mathbf{W}}-\mathbf{C})\end{aligned} \tag{35}$$

stąd

$$\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} = \mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})\mathbf{B}\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} \tag{36}$$

oraz

$$\mathbf{R}\ \mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} = \mathbf{R}\ \mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})\mathbf{B}\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} \tag{37}$$

Łączymy (34) z (37):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_2\,\mathrm{d}\,\mathbf{X} - \mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} &= \left[-\mathbf{T}_2\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})\mathbf{B}\right]\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} = \\ &= -\underbrace{\left[\mathbf{T}_2\mathbf{U} + \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{P}(\mathbf{AU}-\mathbf{E})\right]}_{\mathbf{Y}}\left[\mathbf{E}\ \mathbf{B}_p\right]\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}} = -\left[\mathbf{Y}\ \ \mathbf{Y}\mathbf{B}_p\right]\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}\end{aligned} \tag{38}$$

Dostosowując (38) do formy wzoru (26) otrzymamy:

$$\mathbf{T}_2\ \mathrm{d}\,\mathbf{X} - \mathbf{R}\ \mathrm{d}\,\mathbf{V}_{\overline{W}_w} = -\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{Y}\mathbf{B}_p & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_w \\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_p \\ \mathrm{d}\,\mathbf{W}_p\end{bmatrix} \tag{39}$$

Podstawiając (39) i (30) do (27) napiszemy:

$$\mathrm{d}\,\underline{\underline{\mathbf{W}}}^t_p = -\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{Y}\mathbf{B}_p - \mathbf{J}_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_w \\ \mathrm{d}\,\overline{\mathbf{W}}_p \\ \mathrm{d}\,\mathbf{W}_p\end{bmatrix} \tag{40}$$

Stosując do funkcji (24) z uwzględnieniem (40) prawo kowariancji otrzymamy:

$$\mathbf{C}_{\underline{\underline{W}}^t_p} = m_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{Y}\mathbf{B}_p - \mathbf{J}_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}^{-1}_{W_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}^T \\ \mathbf{B}_p^T\mathbf{Y}_p^T \\ -\mathbf{J}_{13}^T\end{bmatrix} \tag{41}$$

Wymnażając macierze (41) z uwzględnieniem wcześniej wprowadzonych oznaczeń dojdziemy do postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\underline{\underline{W}}^t_p} &= m_0^2\left(\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y}\mathbf{B}_p\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p}\mathbf{B}^T_p\mathbf{Y}^T + \mathbf{B}_u\mathbf{P}^{-1}_{W_p}\mathbf{B}^T_u\right) = \\ &= m_0^2\left[\mathbf{Y}\left(\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w} + \mathbf{B}_p\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_p}\mathbf{B}^T_p\right)\mathbf{Y}^T + \mathbf{B}_u\mathbf{P}^{-1}_{W_p}\mathbf{B}^T_u\right] = m_0^2\left[\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}^T + \mathbf{B}_u\mathbf{P}^{-1}_{W_p}\mathbf{B}^T_u\right]\end{aligned} \tag{42}$$

Uwzględniając wcześniej podane związki pomiędzy oznaczeniami dojdziemy do ostatecznej formy wzoru na określenie średniego błędu współrzędnej $\underline{\underline{W}}_j$

$$m_{\underline{\underline{W}}_j} = m_0\sqrt{\left\{\mathbf{T}_2\mathbf{N}^{-1}\mathbf{T}^T_2 + \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\left[\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{P}^{-1}_{\overline{W}_w}\mathbf{R}^T + \mathbf{B}_u\mathbf{P}^{-1}_{W_p}\mathbf{B}^T_u\right\}_{jj}} \tag{43}$$

W tym wzorze: $W_j = X_j$ lub $W_j = Y_j$.

Średnie błędy położenia punktów liczone będą powszechnie stosowanym wzorem

$$m_{p_j} = \sqrt{m^2_{\underline{\underline{X}}_j} + m^2_{\underline{\underline{Y}}_j}} \tag{44}$$

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Wyprowadzony wzór (43) pozwala na wykonanie ścisłej oceny dokładności współrzędnych transformowanych po wprowadzeniu korekt Hausbrandta. Dzięki temu pozyskujemy informację o klasie dokładnościowej wszystkich punktów po zakończeniu procedur obliczeniowych.

7. LITERATURA

1. Beluch J., 2007. Ocena dokładności w transformacji współrzędnych sposobem Helmerta. *Acta Scientifica Akademiae Ostroviensis. Prace Wydziału Geodezji i Kartografii*, z. 27, s. 17-25.
2. Beluch J., 2008. Precise Accuracy Evaluation of Transformation Parameters and Point Coordinates upon Helmert Transformation. *Geomatics and Environmental Engineering*. AGH Cracow, Vol. 2, No. 3, s. 11-27.

Praca została wykonana w ramach badań statutowych Katedry Geomatyki AGH Kraków w 2009 r.

PRECISE ACCURACY EVALUATION OF TRANSFORMED COORDINATES AFTER HAVING INCLUDED THE HAUSBRANDT CORRECTIONS

KEY WORDS: accuracy evaluation, transformation of coordinates, Hausbrandt corrections

SUMMARY: Secondary coordinates of common points after transformation are most often left unchanged, with their catalogue values maintained. This procedure disturbs Helmert transformation similarity characteristic. The so-called Hausbrandt corrections are introduced to minimise the effects of the presented procedure. The article contains derivation of formulae allowing to determine precisely mean square errors of coordinates and positions of points after having included the corrections.
A functional model in the form of conditional equations with unknowns was adopted in order to determine transformation parameters. Moreover, also a stochastic model, specifying accuracy relations for coordinates (pseudo-observations) of common points in primary and secondary systems, was taken into account in computational procedures. The derived formulae allow, among other things, classifying points after transformation into an appropriate accuracy class.

Prof. dr hab. inż. Józef Beluch
e-mail: beluch@agh.edu.pl
tel. +12 6173542
fax +12 6331791