

Idzi Gajderowicz

## ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI RÓWNOKĄTNEJ WYŻSZEGO STOPNIA DO WIĄZANIA UKŁADU 1965 Z UKŁADEM XY2000

### Streszczenie

Transformacja równokątna może zapewnić dokładne przejście między dwoma układami współrzędnych płaskich XY jeśli oba te układy powstały w wyniku odwzorowań równokątnych tej samej elipsoidy odniesienia. Warunki te spełnione są np. w przypadku transformacji współrzędnych z Układu 1965 do układu GUGiK80.

Przed zastosowaniem transformacji równokątnej do wiązania Układu 1965 z układem XY2000 należy najpierw rozważyć jak wpływa zmiana elipsoidy odniesienia.

W pracy przedstawione są wyniki odpowiednich eksperymentów numerycznych i wynikające z nich wnioski praktyczne.

Już w najbliższej przyszłości polscy geodeci będą posługiwali się odwzorowaniami powierzchni elipsoidy Krasowskiego (5 stref Układu 1965, układ GUGiK80) oraz odwzorowaniami powierzchni elipsoidy WGS84 (układ 1992, 4 pasy układu 2000).

Pojawia się zatem problem transformowania współrzędnych między układami zdefiniowanymi dla różnych elipsoid odniesienia.

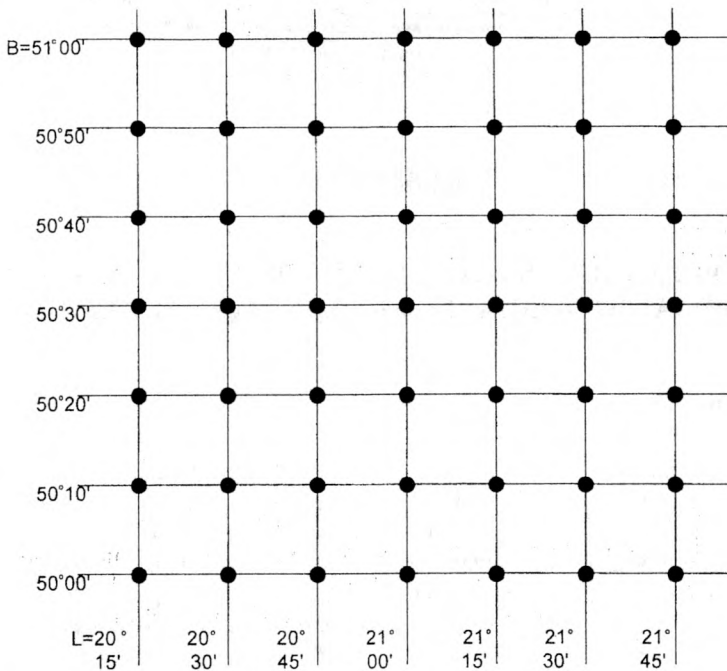
Wiadomo, że transformację równokątną [Gajderowicz, 1999] można zastosować jeżeli oba układy współrzędnych płaskich („stary” i „nowy”) oparte są na odwzorowaniach równokątnych tej samej elipsoidy odniesienia.

Można, na przykład, wykorzystać transformację równokątną do przeliczania współrzędnych płaskich X, Y z jednej strefy Układu 1965 do drugiej, lub z dowolnej strefy Układu 1965 do układu GUGiK80.

Stopień transformacji równokątnej zależy przede wszystkim od wielkości obszaru na którym rozrzucone są punkty. Stopień wyznacza się eksperymentalnie, metodą najmniejszych kwadratów, w oparciu o punkty dostosowania mające współrzędne w obu układach. Wybrać należy taki stopień, który zapewnia najmniejszą wartość błędu średniego pojedynczej współrzędnej ( $m_0$ ) dla danego zbioru punktów dostosowania.

Pierwszy eksperyment przygotowano celem sprawdzenia programów komputerowych, zastosowanych do generowania współrzędnych płaskich, programu wykonującego transformację równokątną dowolnie wybranego stopnia oraz celem dobrania stopnia transformacji dla danego zbioru punktów dostosowania.

Rozkład punktów dostosowania pokazano na rysunku 1. Punkty dostosowania leżą więc na obszarze o przybliżonych wymiarach 111 km × 106 km.



Rys. 1

Oba odwzorowania, [1] i [2], są odwzorowaniami elipsoidy odniesienia WGS84. Odwzorowania te zdefiniowano następująco:

odwzorowanie Gaussa – Krügera [1]  
 $(L_0=21^\circ, X_0=0, Y_0=7500000, m_0=0.999923)$ ,

odwzorowanie quasi – stereograficzne [2]  
 $(B_0=50^\circ37'30'', L_0=21^\circ05'00'', X_0=5467000, Y_0=4637000, m_0=0.9998)$ ,  
 podobnie jak w strefie 1 Układu 1965 – lecz na elipsoidzie WGS84).

Po zastosowaniu transformacji równokątnej współrzędnych płaskich X, Y z układu [1] do [2] otrzymano następujące wielkości błędu średniego  $m_0$ .

Tabela 1.

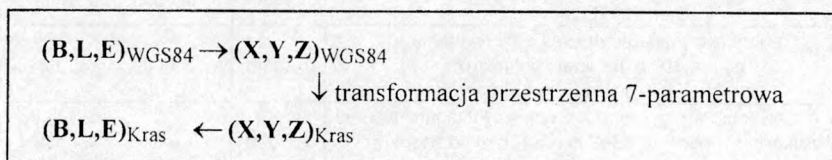
Stopień transformacji	1	2	3	4
$m_0$ w metrach	0.3611	0.2989	<0.0001	<0.0001

Optymalnym stopniem tej transformacji jest stopień trzeci. Tak małą wartość  $m_0$ , mniejszą od 0.0001 m, można było otrzymać ponieważ współrzędne punktów wpasowania podano z dokładnością 0.1 mm.

Drugi eksperyment przygotowano celem sprawdzenia przydatności wzorów transformacji równokątnej w przypadku nietypowym, gdy oba odwzorowania są równokątne lecz przedstawiają obrazy różnych elipsoid odniesienia.

W tym miejscu należy przypomnieć sobie, że sieć geodezyjna zrzutowana na pierwszą elipsoidę odniesienia będzie miała nieco inny kształt niż ta sama sieć zrzutowana na drugą elipsoidę odniesienia.

Przeliczenie współrzędnych geodezyjnych B, L, E związanych z elipsoidą WGS84 na współrzędne B, L, E związane z elipsoidą Krasowskiego można wykonać według następującego schematu (rys. 2) jeśli znane są parametry transformacji przestrzennej podobieństwa.



Rys.2.: Transformacja przestrzenna współrzędnych.

Przystępując do drugiego eksperymentu dołączono odpowiednie wysokości elipsoidalne E do współrzędnych geodezyjnych B, L występujących w odwzorowaniach [1], [2] a następnie przeliczono współrzędne  $(B, L, E)_{WGS84}$  na  $(B, L, E)_{Kras}$ . Parametry transformacji przestrzennej zaczerpnięto z [Kadaj R., 1999].

Odwzorowanie [3] jest odwzorowaniem powierzchni elipsoidy Krasowskiego. Zastosowano odwzorowanie quasi – stereograficzne takie, jakie występuje w strefie 1 Układu 1965. Współrzędne  $(X, Y)_3$  przedstawiają zatem pozycje tych samych punktów, które przedstawione już były przez  $(X, Y)_1$  w odwzorowaniu [1].

W praktyce geodezyjnej, aby otrzymać prawidłowe współrzędne w Układzie 1965, należy do współrzędnych  $(X, Y)_3$  dodać poprawki wynikające z zastosowania transformacji Helmerta.

Tak więc, aby przeliczyć  $(X, Y)_1$  na  $(X, Y)_{1965}$  należy wykonać następujące kroki:

- a) przeliczyć  $(X, Y)_1$  na  $(B, L)_{WGS84}$ , według funkcji odwzorowania odwrotnego do odwzorowania [1];
- b) dołączyć E do B, L w układzie WGS84;
- c) przeliczyć  $(B, L, E)_{WGS84}$  na  $(B, L, E)_{Kras}$  według schematu podanego na rys. 2.
- d) przeliczyć  $(B, L)_{Kras}$  na  $(X, Y)_3$  korzystając z funkcji odwzorowania [3];
- e) zastosować transformację Helmerta.

Sprawdźmy, czy ten schemat można zastąpić jednym krokiem – transformacją równokątną odpowiednio dobranego stopnia. Transformację wykonamy dla czterech przypadków. W każdym przypadku będą występowały nieco inne współrzędne  $(X, Y)_3$ , co wynika z przyjęcia innych wysokości punktów. Zmiana wysokości E w układzie WGS84 zmienia nie tylko wysokość E nad elipsoidą Krasowskiego lecz także  $B_{Kras}$  i  $L_{Kras}$  a zatem także  $(X, Y)_3$ .

Założenia i wyniki kolejnych przypadków przedstawiono w tabeli 2. W każdym przypadku optymalnym stopniem transformacji był stopień trzeci.

Podane wielkości maksymalnych poprawek do współrzędnych wskazują granice błędów (wywołanych głównie różnicami wysokości), których transformacja równokątna nie może usunąć.

Tabela 2.

	Przypadek	$m_0$	Maksymalne poprawki do współrzędnych	
			$ v_x _{\max}$	$ v_y _{\max}$
1	Wysokość każdego punktu $E = 0m$	0.2 mm	0.5 mm,	0.5 mm
2	Wysokość każdego punktu $E = 250m$	0.2 mm	0.5 mm,	0.5 mm
3	Wysokości punktów zmieniają się regularnie od $E = 100 m$ na skraju północnym do $E = 400 m$ na skraju południowym	1.2 mm	2.3 mm,	2.3 mm
4	Wysokości $E$ jak w przypadku 3, z tym, że kilka punktów ma wysokości różniące się o 300 m lub 150 m od wysokości punktów sąsiednich.	1.7 mm	1.6 mm,	4.8 mm

Maksymalne błędy współrzędnych, wynikające z różnic wysokości punktów, można oszacować z następujących zależności:

$$\frac{(\Delta X)_3}{\Delta E_{WGS84}} = \frac{-0.0019m}{400m}$$

$$\frac{(\Delta Y)_3}{\Delta E_{WGS84}} = \frac{-0.0093m}{400m}$$

Dla  $\Delta E_{WGS84} = 200 m$  zmiany współrzędnych wyniosą odpowiednio:  
 $\Delta X = -0.0010$ ,  $\Delta Y = -0.0046$ .

Podsumowanie:

- Błędy, których transformacja równokątna nie potrafi usunąć zależą głównie od różnic wysokości punktów;
- Na obszarach równinnych można stosować transformację równokątną bez obaw – błędy współrzędnych, spowodowane różnicami wysokości, nie przekraczają 1 mm;
- Na obszarach pagórkowatych ( $|E - E_{sr}| < 200m$ ) transformację równokątną można stosować nawet do przeliczania sieci III klasy – błędy współrzędnych, spowodowane różnicami wysokości, mieszczą się w granicach 5 mm.

## Literatura

1. Gajderowicz I., 1999, *Kartografia Matematyczna dla Geodetów*, Wydawnictwo Akademii Rolniczo – Technicznej w Olsztynie, wydanie II;
2. Kadaj R., 1999, *Projekt Wytycznych Technicznych G - 1.10 „Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych”*, przygotowane dla GUGiK.

Recenzował: dr inż. Władysław Mierzwa